② Найти значения m такие, чтобы векторы $\bar{a} = m\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = -2\bar{i} + \bar{j} + m\bar{k}$ и $\bar{c} = 2m\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ были компланарны.

Решение: Найдем смешанное произведение векторов:

$\bar{a} = \{m; 1; 1\}$; $\bar{b} = \{-2; 1; m\}$; $\bar{c} = \{2m; 1; -1\}$

$$\bar{a}\cdot[\bar{b}\times\bar{c}] = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -2 & 1 & m \\ 2m & 1 & -1 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & m \\ 2m & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m(1(-1) - m\cdot 1) - (-2(-1) - m\cdot 2m) + (-2\cdot 1 - 1\cdot 2m) =$$

$$= m(-1-m) - (2-2m^2) + (-2-2m) = -m - m^2 - 2 + 2m^2 - 2 - 2m =$$

$$= m^2 - 3m - 4$$

3 вектора компланарны если их смешанное произведение равно нулю.

$m^2 - 3m - 4 = 0$

$D = 9 - 4\cdot(-4) = 9 + 16 = 25$

$m = \frac{3 \pm 5}{2}$ $\quad m_1 = 4 \quad m_2 = -1$

Ответ: $m_1 = 4$; $m_2 = -1$

③ $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{(x-3)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{2x+3} + 3)}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(2x+3) - 9}{(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2x+3-9}{(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{2x+3}+3)} = 2\lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}+3} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3+3}+3} = \frac{2}{3+3} =$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

④ $y = \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \arcsin(2x) - 16$

Решение:

$$y' = \left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} - \arcsin(2x) - 16\right)' = \frac{(2x)'\sqrt{1-4x^2} - 2x\left(\sqrt{1-4x^2}\right)'}{(1-4x^2)} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)' - 0 = \frac{2\sqrt{1-4x^2} - 2x\cdot\frac{1}{2}(1-4x^2)^{-1/2}(1-4x^2)'}{(1-4x^2)} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{2(1-4x^2) - x(-8x) - 2(1-4x^2)}{(1-4x^2)^{3/2}} = \frac{2-8x^2+8x^2-2+8x^2}{(1-4x^2)^{3/2}} = \frac{8x^2}{(1-4x^2)^{3/2}}$$

Ответ: $\frac{8x^2}{(1-4x^2)^{3/2}}$

5) $y = x - \ln x$

Решение: 1) Область определения функции: $x > 0$, т.е. $D(y) = (0; +\infty)$

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0\pm 0}(x - \ln x) = \infty$$

Значит $x = 0$ - вертикальная асимптота

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y = x - \ln x = 0$ $\quad x = \ln x \Rightarrow$ точек пересечения нет

Oy: $x \neq 0$ точек пересечения нет.

3) Функция общего вида т.к.:

$$y(-x) = -x - \ln(-x) = -(x + \ln(-x)) \neq \pm y(x)$$

4) Экстремумы и монотонность. Вычислим первую производную функции:

$$y' = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 0$ → критические точки

y': $-$ $+$; 0 1
y: $\searrow$ min $\nearrow$

Функция возрастает на интервале $(1; +\infty)$, убывает на интервале $(0; 1)$

Функция имеет минимум в точке

$x = 1$; $y(1) = x - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

5) Выпуклость и точки перегиба.

Вычисляем вторую производную:

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

Критическая точка: $x = 0$

y''	0	$+$
y		$\smile$

Функция выпукла вниз на интервале $(0; +\infty)$. Точек перегиба нет.

6) Асимптоты вида $y = kx + b$

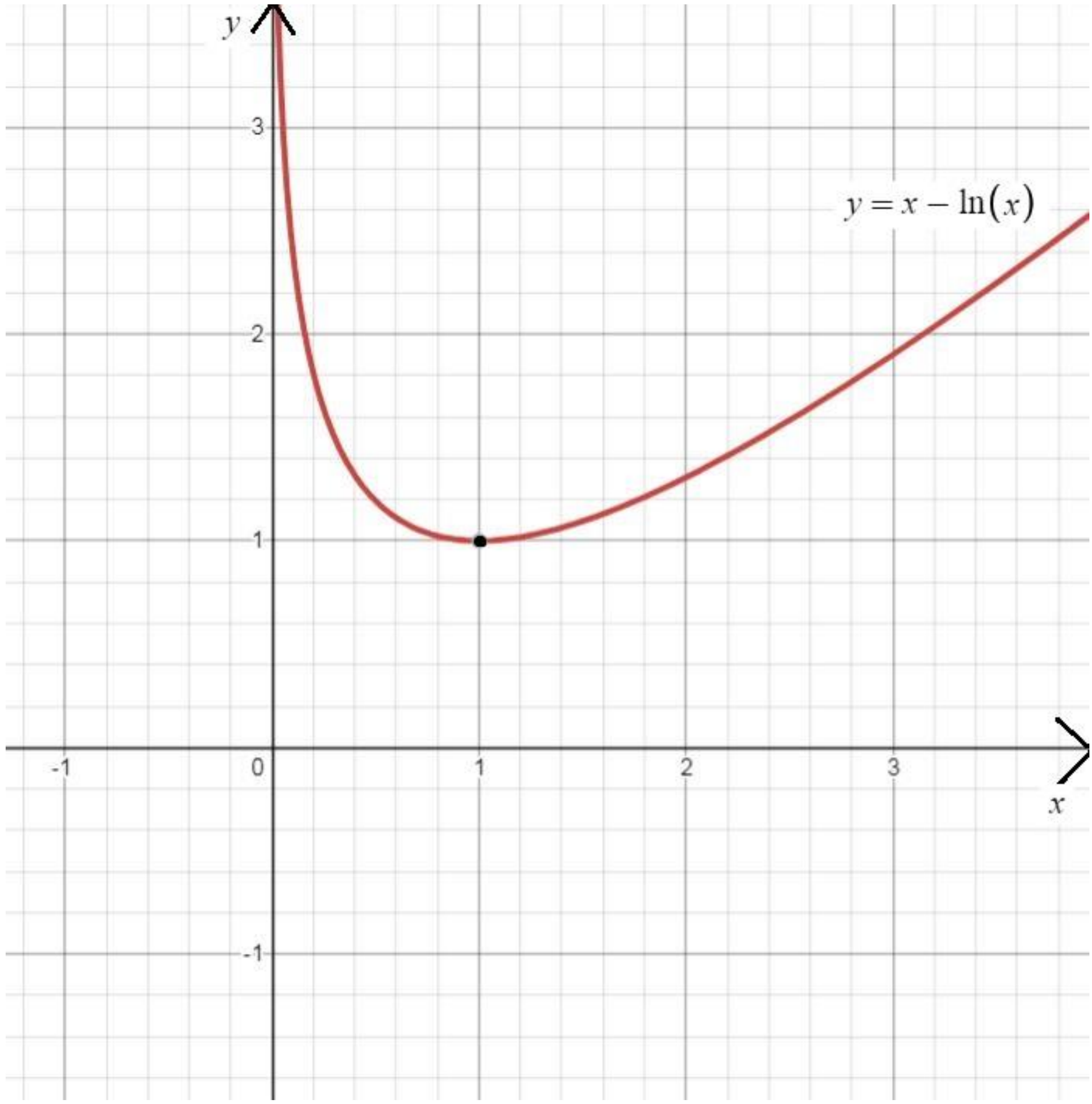
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 1/x}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} (x - \ln x - x) = -\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Асимптот нет.

7) Построим график функции:



y
3
2
1
0
-1
-1
1
2
3
x
$y = x - \ln(x)$

⑥ $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Замена} \\ t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ dx = x\,dt \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$

Сделаем проверку:

$\left(\frac{1}{3} \ln^3 x + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \ln^2 x (\ln x)' + 0 = \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{x}$

Ответ: $\frac{1}{3} \ln^3 x + C$

⑦ $y = \ln x$; $x = e^2$; $y = 0$

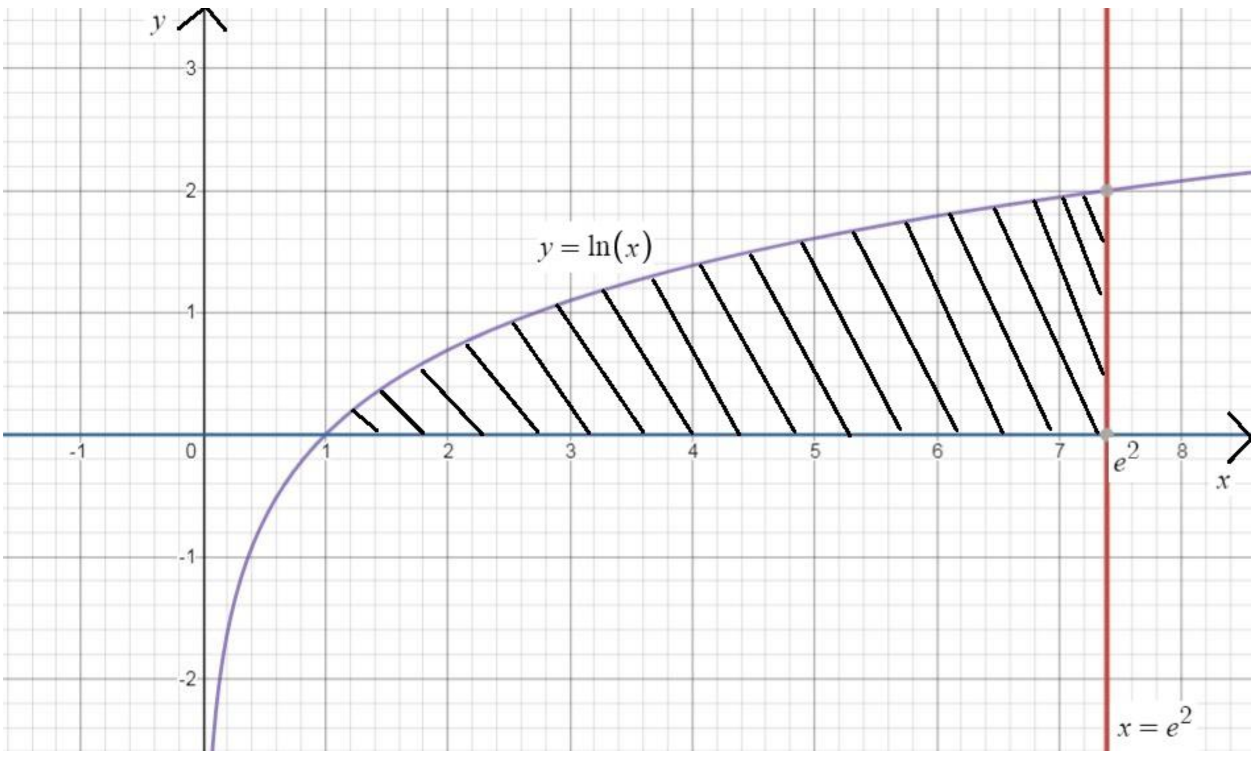
Решение:

Найдём точки пересечения графиков:

$\begin{cases} y = \ln x \\ x = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \ln e^2 \\ e^y = e^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = e^2 \end{cases} \end{array}$

$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow e^0 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Сделаем чертёж:



тогда площадь фигуры:

$$\begin{cases} 1 \le x \le e^2 \\ 0 \le y \le \ln x \end{cases}$$

$$S = \int_1^{e^2} (\ln x - 0)\,dx = \int_1^{e^2} \ln x\,dx \;=\;$$ интегрируем по части

$u = \ln x \qquad du = \dfrac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = \int dx = x$

$$= x\ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx = e^2 \ln e^2 - 1\ln(1) - x\Big|_1^{e^2} = e^2 \cdot 2 - 0 - (e^2 - 1) =$$

$$= 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

Ответ: $S = e^2 + 1$